Turniergraphen (1)

- Def.: Ein Turniergraph ist ein gerichteter Graph $G=(V,A)$, so dass für alle $u,v \in V$, entweder $(u,v) \in A$ oder $(v,u) \in A$ gilt.
  - Die Kanten eines Turniergraphen definieren eine vollständige, asymmetrische Relation > (sog. Dominanzrelation) auf den Knoten, d.h. $u>v \Leftrightarrow (u,v) \in A$.
- Def.: Die Vorgänger eines Knotens v werden mit $N^-(v)=\{u \in V: u>v\}$, die Nachfolger mit $N^+(v)=\{u \in V: v>u\}$ bezeichnet.
- Den Grad eines Knotens v definiert man üblicherweise als $deg(v)=|N^+(v)|$.
  - Offensichtlich gilt $|N^+(v)| = |V|-|N^-(v)|-1$

Turniergraphen (2)

- Satz: Ein Turniergraph ist genau dann kreisfrei, wenn seine Dominanzrelation transitiv ist.
  - von links nach rechts: trivial (indirekt)
  - von rechts nach links: Indirekt. Jeder Turniergraph, der einen Kreis enthält, enthält auch einen Kreis der Länge 3 (Induktion über |V|)
- Satz (Redei, 1934): Jeder Turniergraph enthält einen Hamiltonpfad.
  - Beweis: Induktion über |V|
  - Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Pfad in G, u ein weiterer Knoten und k der kleinste Index, so dass für alle i mit $1 \leq i < k$ gilt: $v_i > u$. Dann ist $(v_1, \ldots, v_{k-1}, u, v_k, \ldots, v_n)$ ein Hamiltonpfad.
  - Man kann zeigen, dass jeder Turniergraph eine ungerade Zahl von Hamiltonpfaden enthält.

Turniergraphen (3)

- Def.: Ein Turniergraph $G=(V,A)$ ist reduzibel, wenn es (disjunkte) nicht-leere Mengen V_1 und V_2 mit $V_1 \cup V_2 = V$ gibt, so dass $v_1 > v_2$ für alle $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ gilt.

- Satz (Moon, 1968): Sei G ein Turniergraph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  1) G ist stark zusammenhängend
  2) G ist irreduzibel
  3) Jeder Knoten in G liegt auf einem Kreis der Länge k für alle $k \in \{3, ..., |V|\}$, d.h. insbesondere, dass G einen Hamiltonkreis enthält
  - Beweis:
    - $1 \Rightarrow 2$: indirekt
    - $2 \Rightarrow 3$: Induktion (nächste Folie)
    - $3 \Rightarrow 1$: trivial wegen Existenz eines Hamiltonkreises

Irreduzibilität und Kreise

- Wenn G irreduzibel ist, dann liegt jeder Knoten in G auf einem Kreis der Länge k für alle $k \in \{3, ..., |V|\}$.
  - Beweis: Induktion über k
  - Sei $v \in V$.
  - I.A.: Es muss einen Knoten in $N^+(v)$ geben, der auf einen Konten in $N^-(v)$ zeigt. Sonst wäre G reduzibel (mit $N^-(v) \cup \{v\}$ und $N^+(v)$). Somit liegt v auf einem Kreis der Länge 3.
  - I.S.: Sei $(v=v_1, ..., v_k, v_1)$ ein Kreis der Länge k, $C=\{v_1, ..., v_k\}$, $C^+=\{u: c>u \text{ für alle } c \in C\}$, $C^-=\{u: u>c \text{ für alle } c \in C\}$ und $U=V \setminus (C \cup C^+ \cup C^-)$.
    - 1. Fall ($U=\emptyset$): C^+ und C^- können nicht leer sein, da G sonst reduzibel wäre. Aus demselben Grund muss es einen Knoten u in C^+ geben, der auf einen Knoten w in C^- zeigt. $(v_1, ..., v_{k-1}, u, w)$ ist ein Kreis der Länge k+1.
    - 2. Fall ($U \neq \emptyset$): Sei $u \in U$. Dann gibt es entweder ein i, so dass $v_i>u$ und $u>v_{i+1}$ oder es gilt $v_k>u$ und $u>v_1$. In jedem Fall liegt v auf einem Kreis der Länge k+1.

Turnierlösungen (1)

- Def.: Ein Knoten v eines Turniergraphen G=(V,A) heißt Condorcet-Gewinner, wenn v>w für alle $w \in V \setminus \{v\}$ gilt.
    - Ein Condorcet-Gewinner ist ein Maximum bezüglich der Dominanzrelation.
- Def.: Eine Turnierlösung ist eine Funktion S, die jeden Turniergraphen G auf eine nicht-leere Teilmenge seiner Knoten abbildet, so dass
    - S(G)={v}, wenn v Condorcet-Gewinner in G ist und
    - $S(G_1)=f(S(G_2))$, wenn f ein ein Isomorphismus zwischen G_1 und G_2 ist.
- Anwendungen
    - Sportturniere, kollektive Entscheidungstheorie (Wahlverfahren), Psychometrik, Spieltheorie, etc.

Turnierlösungen (2)

- "Unproblematische" Turniergraphen
  - Kreisfreie Turniergraphen (jeder induzierte Teilgraph enthält einen Condorcet-Gewinner)
  - Turniergraphen, in denen ein Condorcet-Gewinner existiert
- Idee: Modifiziere den Graphen so wenig wie möglich bis er unproblematisch ist und wähle den Condorcet-Gewinner aus.
  - Drehe so wenig Kanten wie möglich um, bis G unproblematisch ist.
  - Finde unproblematische inklusions-maximale induzierte Teilgraphen

	Condorcet	kreisfrei
G'=(V,A') für maximales $A' \cap A$	Copeland Menge	Slater Menge
G'=G[V'] für inklusions-maximales $V' \subseteq V$	Unüberdeckte Menge	Banks Menge

Die Copeland Menge CO(G)

Llull (1299), Zermelo (1929), Copeland (1951)

- Welche Knoten können durch das Umdrehen von so wenig Kanten wie möglich zu einem Condorcet-Gewinner gemacht werden?
- Für die Copeland Menge gilt $CO(G)=\operatorname{argmax}_{v\in V}\{\deg(v)\}$.
- Offensichtlich kann CO(G) in linearer Zeit berechnet werden.
    - Wähle die Knoten, deren Zeilensumme in der Adjazenzmatrix maximal ist

Die Slater Menge SL(G)

Slater (1961)

- Drehe so wenig Kanten wie möglich um, um einen kreisfreien Graphen zu erhalten und wähle den Condorcet-Gewinner des resultierenden Graphen aus.
- Satz: Zu entscheiden, ob ein Knoten in SL(G) liegt, ist NP-schwer.
  - Beweis: Reduktion von *feedback arc set* (Ist es möglich einen Graphen durch das Entfernen von höchstens k Kanten kreisfrei zu machen?)
  - Die NP-Vollständigkeit von *feedback arc set* in Turniergraphen wurde erst 2005/2006 gezeigt (dreimal unabhängig voneinander)
  - Obiges Problem ist nicht in NP sofern die polynomielle Hierarchie nicht kollabiert

Die unüberdeckte Menge UC(G)

Fishburn (1977), Miller (1980)

- Wähle Knoten aus, die Condorcet-Gewinner in inklusions-maximalen induzierten Teilgraphen von G sind.
- Satz (Shepsle et al., 1984): Die unüberdeckte Menge besteht genau aus den Knoten, die jeden anderen Knoten über einen Pfad der maximalen Länge 2 erreichen.
  - Beweis:
  - $v \in UC(G)$
  - $\Leftrightarrow \exists U \subseteq V$, v ist Condorcet-Gewinner in $G[U]$ und $\nexists w \in V$: $w > u$ für alle $u \in U$
  - $\Leftrightarrow \exists U \subseteq V$ wie oben, so dass für alle $w \in N^{-}(v)$ gilt: $\exists u \in U$ mit $u > w$

Die unüberdeckte Menge (2)

- Die unüberdeckte Menge kann effizient berechnet werden.
  - Berechne $M=A^2+A+E$ (wobei A die Adjazenzmatrix von G und E die Einheitsmatrix ist)
  - UC(G) besteht aus genau den Elementen, deren Zeilen in M keine Null enthalten
  - Matrixmultiplikation mit Algorithmus von Coppersmith & Winogard (1990): $O(|V|^{2,38})$
- Satz: In allen Turniergraphen gilt $CO(G) \subseteq UC(G)$.
  - Beweis: Für jedes $v \in CO(G)$, ist $G[\{v\} \cup N^+(v)]$ ein (inklusions-)maximaler induzierter Teilgraph, der einen Condorcet-Gewinner enthält.
- Korollar (Vaughan, 1952): In einem Turniergraphen erreicht jeder Knoten mit maximalem Grad jeden anderen Knoten auf einem Pfad der maximalen Länge 2.

Die Banks Menge BA(G)

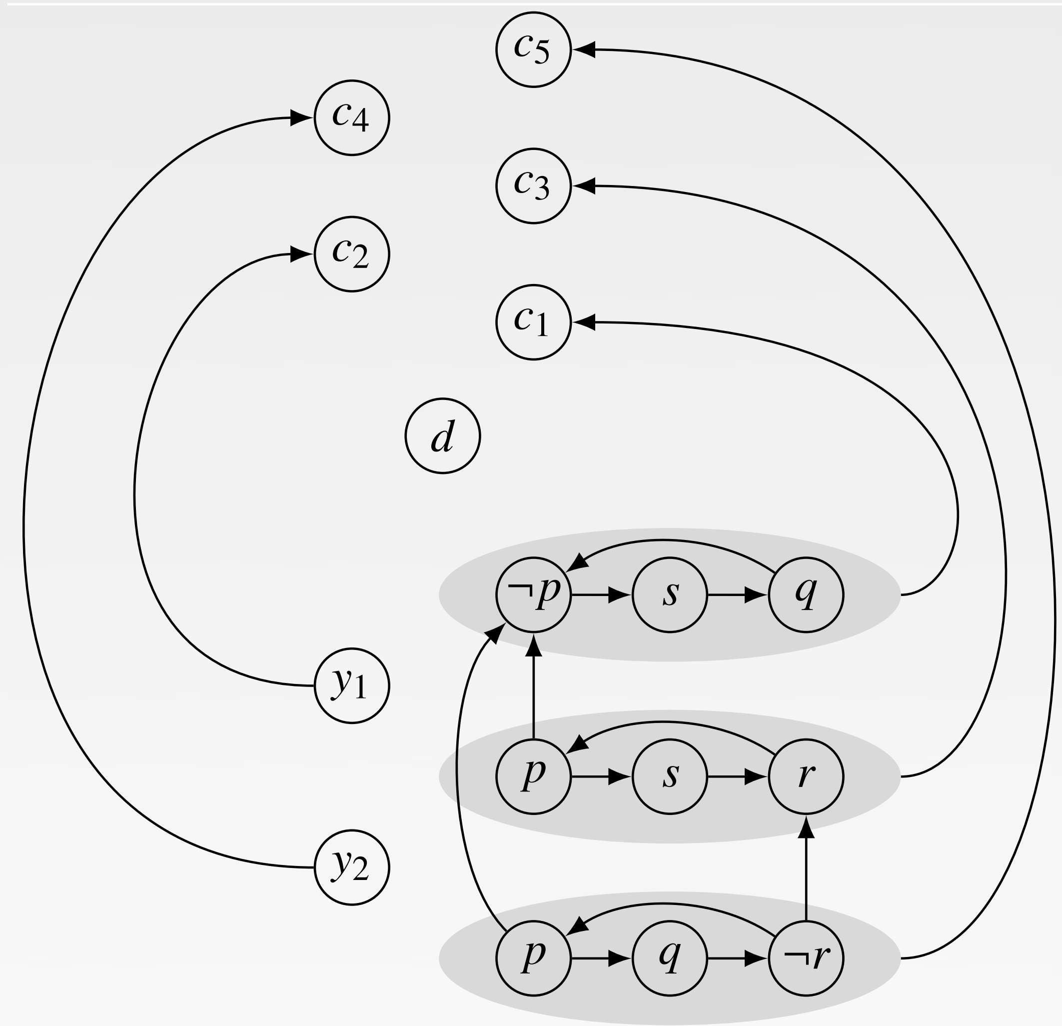
Banks (1985)

- Wähle Knoten, die Condorcet-Gewinner in inklusions-maximalen kreisfreien induzierten Teilgraphen von G sind.
- Satz: In allen Turniergraphen gilt $BA(G) \subseteq UC(G)$.
  - Beweis:
  - Sei $v \in BA(G)$ und $U \subseteq V$, so dass $G[U]$ ein inklusions-maximaler kreisfreier induzierter Teilgraph von G mit Condorcet-Gewinner v ist.
  - Dann ist $G[U]$ auch ein inklusions-maximaler induzierter Teilgraph, der einen Condorcet-Gewinner enthält.

Berechnung der Banks Menge

- Satz: Ein Knoten aus BA(G) kann effizient gefunden werden.
  - $U=\emptyset$
  - While $\exists u \in V$: $G[U \cup \{u\}]$ kreisfrei
  - $\quad U=U \cup \{u\}$
  - Endwhile
  - Return Condorcet-Gewinner von G[U]
- Kann die ganze Menge BA(G) effizient berechnet werden?
- Satz: Festzustellen, ob ein Knoten in BA(G) liegt, ist NP-vollständig.
  - Beweis: Reduktion von 3SAT.

- Alle fehlenden Kanten zeigen von oben nach unten
- Sei U ein inklusions-maximaler kreisfreier induzierter Teilgraph mit Condorcet-Gewinner d
- U muss einen Knoten aus jeder Ebene unter d beinhalten
  - Ansonsten könnte man c_i zu U hinzufügen
- U darf keine Pfeile nach oben beinhalten.
  - Ansonsten wäre G[U] nicht kreisfrei
- $d \in BA(G) \Leftrightarrow \varphi$ erfüllbar
- von links nach rechts:
  - Setze alle Literale in U auf wahr
- von rechts nach links:
  - Wähle U, so dass d, $y_1, \ldots, y_{m-1}$ und aus jeder Klausel mindestens eins und höchstens zwei positive Literale enthalten sind. G[U] ist kreisfrei und kann nicht vergrößert werden, ohne dass ein Kreis entsteht



- Ein Heißluftballon mit vier Passagieren an Bord ist zu schwer.
  - Einer der Passagiere muss aussteigen.
  - Jeder Passagier kann, basierend auf seinen körperlichen Fähigkeiten, bestimmte andere Passagiere aus dem Ballon werfen. Von den restlichen Passagieren kann er selbst aus dem Ballon geworden werden.

1. Strategie: Jeder versucht einen beliebigen, ihm unterlegenen, Passagier aus dem Ballon zu werfen.
   - Es kommt zu einer Rangelei und der Ballon zerschellt.
   - Möglicherweise selbst wenn ein Passagier allen anderen unterlegen ist

2. Strategie
   - B ist für A von Nutzen, wenn B einen Passagier bedroht, der A aus dem Ballon werfen könnte.
   - Es werden prinzipiell nur noch nutzlose Passagiere aus dem Ballon geworfen.
   - ➡ Satz: Es gibt immer einen Passagier, der niemanden mehr bedrohen kann, und einen weiteren Passagier der obigen entfernt.